

项目名称：分析非线性多自由度系统随机振动和求解高维 FPK 方程的新方法

主要完成人：鄂国康(澳门大学)，姚伟彬(澳门大学)

提各单位意见：

我单位认真审阅了该项目推荐书及附件材料，确认全部材料真实有效，相关栏目均符合国家科学技术奖励工作办公室的填写要求。按照要求，我单位和项目合作完成单位都已对该项目的拟提名情况进行了公示，目前无异议。

非线性随机振动问题广泛存在于科学和工程的各个领域。精确、有效地分析系统的概率解是近一个世纪以来学术界长期存在的难题。特别是对强非线性多自由度随机动力系统的概率求解问题一直困扰着人们。该项目提出了一个全新方法用于解决这一难题。其思路是将多自由度非线性随机系统所对应的高维 FokkerPlanck-Kolmogorov 方程降维而解之。该方法为解决和研究多自由度非线性随机振动问题提供了一个崭新和有效途径，推动了非线性随机微分方程及其对应的 Fokker-Planck-Kolmogorov 方程向解决非线性多自由度系统随机振动实际应用问题的应用和发展。近年来该方法已用于解决一些实际问题，被国内外相关领域的专家学者所采纳和引用，具有广泛的发展和应用前景。

对照国家自然科学奖授奖条件，提名该项目申报 2019 年度国家自然科学奖二等奖。

项目简介：

(1) 主要内容：首先提出指数多项式闭合(exponential-polynomial closure)法，简称 EPC 法，以求解单自由度或两自由度非线性随机动力系统所对应的二维或四维 Fokker-Plank-Kolmogorov (FPK) 方程。然后再提出状态空间分裂(state-space-split)法，简称 SSS 法，将多自由度非线性随机动力系统所对应的高维 FPK 方程降维，使这些降维的 FPK 方程可以用 EPC 法求解。整个求解过程简称为 SSS-EPC 法。将 SSS-EPC 法应用于解决各种实际应用问题并验证其有效性。

(2) 科学发现点：发现了半解析求解 FPK 方程的 EPC 法。经过研究进一步发现 EPC 法可以精确有效地求解带多项式或幂形式非线性或(和)带参数激励的单自由度或两自由度非线性随机动力系统所对应的二维或四维 FPK 方程。发现了可以对 FPK 方程降维的 SSS 法。数值研究进一步发现，SSS 法可以有效地将带多项式形式非线性或(和)带参数激励的多自由度非线性随机动力系统所对应的高维 FPK 方程降维。特别是 SSS 法可以将高维 FPK 方程降到二维或四维 FPK 方程，然后这些二维或四维 FPK 方程可以用 EPC 法求解。

(3) 科学价值：科学和工程中的很多实际问题要用非线性随机动力系统描述，例如高层建筑或大跨桥梁在风或地面运动作用下的振动问题，车辆在凹凸不平的地面上运行的振动问题，海洋平台或船只在风浪作用下的振动问题，飞行器在紊流作用下的振动问题，纳米系统在热噪作用下的振动问题，以及一些统计物理、生物物理和金融经济等领域中的很多问题要用非线性随机动力系统描述。精确有效地分析随机动力系统响应的概率密度函数解对于深入研究系统特性和可靠度分析具有重要意义，但精确有效地求解非线性动力系统在随机激励下响应的概率密度函数问题已困扰了学术界近一个世纪。EPC 法将过去针对单自由度非线性随机动力系统的研究扩展到了两自由度非线性随机动力系统的研究，或将求解二维 FPK 方程的研究扩展到了求解四维 FPK 方程的研究。SSS 法将求解低维 FPK 方程的研究扩展到了求解高维 FPK 方程的研究，且不受系统或 FPK 方程维数的限制，从而使非线性随机振动理论和 FPK 方程向实际应用的发展跨出了关键一步。

(4) 同行引用及评价：经过 Web of Science 检索，申请人所提供的 8 篇代表性论文被他人 SCI 引用的次数是 116 次。经过 Google Scholar 检索，申请人所提供的 8 篇代表性论文被他人引用的次数是 196 次。同行的评价都是正面的，参见“五、客观评价”项。这里要指出的是，非线性随机振动理论和方法的研究是一个极具挑战性的课题，国际上从事这一课题研究的学者屈指可数。相对其它热门课题，该课题的论文他引率都不高。就是在非线性随机振动领域的一些著名学者包括国内外院士们在内的相关论文他引率也不高。从 Web of Science 检索可以看出，一些著名学者发表已久的单篇论文的总引用次数能达到 100 以上已经算很高了。同时要用 SSS-EPC 法解决问题除了需要掌握 SSS-EPC 方法外，也需要具备深厚的非线性随机振动理论基础、宽广的计算力学及计算数学知识、和极强的计算机科技程序编写能力。虽然申请人基于 SSS-EPC 法开发出了计算机软件，但目前尚未公开。这些都是导致申请人所发表论文他引次数不高的原因。

客观评价：

1. Lincong Chen and Jianqiao Sun (2016), *Communications of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 41, 1-10: In the last decade, Er proposed the method of exponential polynomial closure (EPC) to solve the reduced FPK equation [3, 4, 5]. In this method, the steady state PDF is approximated as an exponential function of a polynomial in state variables with undetermined coefficients. The assumed solution satisfies the reduced FPK equation in the weak sense. The undetermined coefficients of the polynomial are determined by solving simultaneous quadratic algebraic equations derived from the method of weighted residue. Recently, the EPC method has been extended to the nonlinear systems excited by a Poisson white noise or by a combined Gaussian and Poisson white noises. They have studied the system with multiple peaks in the PDF, and a nonlinear impact oscillator. In conjunction with the method of subspace, the EPC method has been used to predict the steady-state PDF of multi-degree-of-freedom nonlinear systems [7]. Paola and Sofi generalized Er's EPC method with the help of a proper choice of the weighting functions, and suggested a simple and effective iterative procedure to improve the accuracy of the approximate solution.

2. Wen-An Jiang, Peng Sun and Zhao-Wang Xia (2018), *International Journal of Dynamics and Control*, Online March 21, 2018, 1-12: (1) Recently, Er [1] first proposed the SSS method as a scheme to reduce the high-dimensional FPK equation and demonstrated that it is an effective method for Gaussian white noise and Poisson white noise [2]. From the above analysis, the PDF solution of coupled electromechanical nonlinear systems under stochastic excitation is less investigated. To address the lack of research in the aspect, the present work applies the SSS method to compute and study the statistical characteristics of vibratory energy harvesters. (2) Er [1] first pioneered the SSS method as a scheme to reduce the high-dimensional FPK equation. The SSS method has been applied to the solution of the high-dimensional FPK equation of the nonlinear system under Gaussian white noise and Poisson pulse excitations [2].

3. Jiri Naprstek and Radomil Kral (2014), *Advances in Engineering Software*, 72, 28-38: Stationary PDF solution on the basis of the exponential function of polynomial in state variables has been proposed in [3] having no limitation by multiplicative excitations and the level of system non-linearity. Extension of this method to high degree of freedom stochastic systems can be found in [1]. In this article, the large-scale system is reduced to low-dimensional state spaces using statespace split method which is then solved with exponential polynomial method.

4. Jianbing Chen and Peihui Lin (2014), *Theoretical and Applied Mechanics Letters*, 4, 013002: The Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) equation plays an essential role in many disciplines of science and engineering when white noise is involved in a dynamical system. The solution of a FPK equation provides the transition or instantaneous joint probability density function of a state vector. Unfortunately, the analytical solution to FPK equations is only available for linear systems and some special nonlinear systems with natural boundary conditions. Moreover, the dimension of FPK equation is identical to the dimension of the related Ito's stochastic differential equation, which is usually very large in practice. Despite great endeavors, the solution of FPK equation for generic high-dimensional nonlinear stochastic systems, no matter by analytical approaches or by numerical methods, is still a great challenge. An alternative is to reduce the dimension of the FPK equation so that the problem will become much easier to solve. For instance, the state-space-split method was proposed by Er [1].

5. Serkan Gunel and F. Acar Savaci (2006), *International Journal of Engineering Science*, 44, 1432{1447: This approach has been extended to Multi-Gaussian case in which the solution is assumed to be the sum of Gaussian pdfs [Er 1998]. Another variant of this method called Exponential Closure is to use the exponential functions of polynomials of the state variables, instead of Gaussian assumption [4, 5]. In these methods, solution of the FPK equation in the weak sense is reduced to a solution of nonlinear algebraic equations.

6. M. Di Paola and A. Sofi (2002), *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17, 369-384: Following Er [4, 5], the approximate solution of this equation is then expanded into a polynomial series, whose unknown coefficients are found by imposing the projection of the residual error into a suitably selected basis to be zero. It has to be emphasized that, in spite of the nonlinearity of the FPK equation in terms of log-PDF, the previously described approach enables to achieve some important goals.

代表性论文专著目录：

序号	论文专著 名称/刊名 /作者	年卷页 码 (xx 年 xx 卷 xx 页)	发表 时间 (年 月 日)	通讯 作者 (含 共 同)	第 一 作 者 (含 共 同)	国内 作者	SCI 他 引 次 数	他 引 总 次 数	论文 署名 单位 是否 包含 国外 单位
1	Methodology for the solutions of some reduced Fokker-Planck equations in high imensions/Annalen der Physik/Guo-Kang Er	2011 年 523(3)卷 247-258 页	2011 年 01 月 10 日	Guo - Kang Er	Gu o - Kan g Er	鄂国康	19	27	否
2	State-space-split method for some generalized Fokker-PlanckKolmogorov equations in high dimensions /Physical Review E/GuoKang Er, Vai Pan lu	2012 年 85(6)卷 067701 页	2012 年 06 月 20 日	Guo - Kang Er	Gu o - Kan g Er	鄂国 康 姚伟 彬	5	7	否
3	An improved closure method for analysis of nonlinear stochastic systems/Nonlinear Dynamics/Guo-Kang Er	1998 年 17(3)卷 279- 291 页	1998 年 08 月 01 日	Guo - Kang Er	Gu o - Kan g Er	鄂国康	19	33	否
4	A consistent method for the solutions to reduced FPK equations in statistical mechanics/Physica A/Guo-Kang Er	1999 年 262 卷 118- 128 页	1999 年 01 月 01 日	Guo - Kang Er	Gu o - Kan g Er	鄂国康	18	31	否
5	Exponential closure method for randomly excited nonlinear systems/International Journal of Non-Linear Mechanics/Guo-Kang Er	2000 年 35(1)卷 69- 78 页	2000 年 01 月 01 日	Guo - Kang Er	Gu o - Kan g Er	鄂国康	27	46	否
6	Stochastic response of base-excited Coulomb oscillator/Journal of Sound and Vibration/Guo-Kang Er	2000 年 233(1)卷 81- 92 页	2000 年 05 月 01 日	Guo - Kang Er	Gu o - Kan g Er	鄂国 康 姚伟 彬	7	14	否

7	Probabilistic solutions of some multi-degree-of-freedom nonlinear stochastic dynamical systems excited by filtered Gaussian white noise/Computer Physics Communications/GuoKang Er	2014 年 185(4)卷 1217-1222 页	2013 年 12 月 27 日	Guo - Kang Er	Guo - Kang Er	鄂国康	4	5	否
8	A method for multiparameter PDF estimation of random variables/Structural Safety /Guo-Kang Er	1998 年 20(1)卷 25- 36 页	1998 年 03 月 01 日	Guo - Kang Er	Guo - Kang Er	鄂国康	17	33	否
合 计							116	196	

主要完成人情况表：

姓名	鄂国康	排名	1	技术职称	副教授
工作单位	澳门大学				
完成单位	澳门大学				
对本项目技术创造性贡献		(1) 提出了指数多项式闭合法。参与指数多项式闭合法形成过程推导，求解过程推导、计算机程序编写、计算分析、数据整理、资料研究和撰写论文等。详见重要科学发现(1.1)-(1.5)项、代表性论文[3-6] 和“完成人合作关系情况汇总表”中所列 1-3 项工作。(2) 提出了状态空间分裂法并将其应用于解决一些高 维实际问题。参与状态空间分裂法形成过程推导，具体问题求解过程推导、计算机程序编写、软件开发、计算分析、数据整理、资料研究和撰写论文等。详见重要科学发现(2.1)-(2.7) 项、代表性论文[1,2,7] 和“完成人合作关系情况汇总表”中所列 4-15 项工作和获奖证书。			
曾获国家科技奖励情况		无			

姓名	姚伟彬	排名	2	技术职称	教授
工作单位	澳门大学				
完成单位	澳门大学				
对本项目技术创造性贡献		(1) 发展了指数多项式闭合法并用于求解一些更			

	广泛的低维 FPK 方程。参与具体问题求解过程推导、资料研究和撰写论文等。详见重要科学发现(1.5)项、代表性论文[6]和“完成人合作关系情况汇总表”中所列 1-3 项工作。(2) 发展了状态空间分裂法并用于解决一些具体问题。参与了广义 FPK 方程降维过程推导，详见重要科学发现(2.6)-(2.7)项和代表性论文[2]。参与具体问题求解过程推倒、资料研究和撰写论文等。详见“完成人合作关系情况汇总表”中所列 4-15 项工作和获奖证书。
曾获国家科技奖励情况	无

完成人合作关系说明

申请人鄂国康和姚伟彬在非线随机振动研究方面有长期合作关系。自1998年就共同致力于EPC方法的开发应用和研究。鄂国康和姚伟彬共同提出和实施了将EPC法用于分析带Coulomb非线性的隔震结构随机振动问题和船舶摇摆的非线随机振动问题, 详见代表作[6]和“完成人合作关系情况汇总表”中第1项工作。同时共同提出和实施了将EPC法扩展用于求解两自由度非线性系统随机振动问题所对应的四维FPK方程, 详见“完成人合作关系情况汇总表”中第9项工作。

自2006年10月至2009年12月, 鄂国康和姚伟彬共同承担了由澳门大学研究委员会资助的科研项目“用EPC法分析一些非线性随机动力系统的研究”。通过该课题的资助和研究, 共同将EPC法进一步推广到了求解受泊松白噪声激励的单自由度非线性动力系统所对应的广义FPK方程的求解问题。详见“完成人合作关系情况汇总表”中的第3项工作。

自2011年6月至2014年5月, 鄂国康和姚伟彬共同承担了由澳门大学研究委员会资助的科研项目“用SSS-EPC法分析一些多自由度非线性随机动力系统的研究”。通过该课题的资助和研究, 共同提出了求解受泊松白噪声激励的多自由度非线性动力系统所对应的高维广义FPK方程的SSS法, 详见代表作[2]。共同将SSS法发展用于解决各种多自由度非线性动力系统所对应的高维FPK方程的求解问题。详见“完成人合作关系情况汇总表”中的第4, 10和11项工作。

自2013年5月至2016年4月, 鄂国康和姚伟彬共同承担了由澳门科学技术发展基金资助的科研项目“大挠度板非线性随机振动分析问题的研究”。通过该课题的资助和研究, 共同将SSS法推广用于求解受几何非线性薄板随机振动所对应的高维广义FPK方程, 几何非线性索随机振动所对应的高维广义FPK方程, 和受拉伸几何非线性梁随机振动所对应的高维广义FPK方程。详见“完成人合作关系情况汇总表”中的第6, 7, 8和12项工作。最近首次将求解问题扩展到了由有限差分所形成的非线性随机动力系统, 详见“完成人合作关系情况汇总表”中的第13项工作。

自2017年8月至今, 鄂国康和姚伟彬共同承担了由澳门科学技术发展基金资助的科研项目“几何非线性桁架结构随机振动响应的概率解研究”。目前正共同致力于将SSS-EPC法进一步开发用于解决工程实际中出现的更多非线性结构随机振动的概率求解问题。本项目试图从分析几何非线性桁架开始, 将SSS-EPC法扩展到分析由有限元法所形成的多自由度非线性随机动力系统。

近二十年来鄂国康和姚伟彬共同申请项目, 共同研究探讨, 共同克服重重困难, 提出并共同发展了SSS-EPC法并将其用于解决一系列力学中出现的非线性随机振动问题, 一起写作发表了相关期刊和会议论文数十篇。2018年共同申请并获得了由澳门特别行政区政府授予的自然科学二等奖, 见附件19。

承诺: 本人作为项目第一完成人, 对本项目完成人合作关系及上述内容的真实性负责, 特此声明。

第一完成人签名:

